# Géogébra 2

**Logiciels pour l'enseignement**
*7 mars 2016*
leo.brunswic.fr

Léo Brunswic
leo.brunswic@univ-avignon.fr

Géogébra est un logiciel permettant de faire des constructions dans le plan, possiblement paramétrées, ou dans l'espace. Géogébra possède également quelques outils de calcul formel dont nous ne ferons pas usage. Je vous invite à regarder https://www.geogebra.org pour la documentation et télécharger Géogébra sur vos propres machines. Pour les utilisateurs d'Ubuntu, la page suivante sera utile : https://doc.ubuntu-fr.org/geogebra.

L'objectif de cette séance est de se familiariser avec Géogébra pour constuire des objets interactifs en 3D.

## 1 Une fourmis sur une bouée

On cherche à illustrer le chemin que prend une fourmis se baladant sur un bouée (un tore). La géométrie des surfaces a été étudiée en profondeur à partir de la fin du XVIIIe siècle, le calcul différentiel permettant de développer les outils nécessaires. Karl Friedriech Gauss au début du XIXe siècle décrit précisément les formules permettant de généraliser la notion de ligne droite.

**Définition 1.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un fonction $C^2$ paramétrant une surface dans $\mathbb{R}^3$ et $S$ son image. Soit $A, B$ deux points sur $S$, une géodésique reliant $A$ à $B$ est la courbe dans $S$ commençant en $A$, finissant en $B$ et de longueur localement minimale.*

Une fourmis se promenant sur une surface $S$ en "ligne droite" suit naturellement une géodésique. Les coordonnées d'une géodésique satisfait une équation différentielle que l'on n'explicitera pas en général mais que nous voyons dans un exemple.

**Exercice 1.** *Proposer un paramétrage $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ d'un tore. Utiliser la commande surface de Géogébra pour la représenter.*

```
Saisie: Surface[ <Expression>, <Expression>, <Expression>, <Variable 1>, <de>, <à>, <Variable 2>, <de>, <à> ]
```

On note $S$ le tore ainsi construit.

**Exercice 2.** *Placer un point amovible $P$ sur $S$ que l'on peut faire bouger via deux curseurs. Construire le plan tangent à $S$ en $P$ et placer un point $Q$ sur ce plan.*

Dans le cas du tore paramétré par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a\cos(\theta) + b\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ a\sin(\theta) + b\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ b\sin(\varphi) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Une géodésique est une courbe dont les coordonnées $(\theta, \varphi)$ satisfont l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \theta'' - \dfrac{2b\sin(\varphi)}{b\cos(\varphi)+a}\theta'\varphi' = 0 \\ \varphi'' + \dfrac{(b\cos(\varphi)+a)\sin(\varphi)}{b}\left(\theta'\right)^2 = 0 \end{cases}$$

**Exercice 3.** *Décrire une méthode d'Euler pour résoudre cette équation différentielle.*

*L'implémenter dans le tableur de Géogébra avec un pas variable (curseur), les conditions initiales étant données par le points $P$ et la vitesse $\overrightarrow{PQ}$.*

Sous Géogébra, quelques outils de manipulation de listes sont proposés. Il est possible de lister les valeurs du tableur via la commande Saisie: A1:A10, de composer une fonction avec une liste avec la commande Saisie: Compactée[ <Expression>, <Var1>, <Liste1>, <Var2>, <Liste2>, ... ]. Par ailleurs, la commande Saisie: LigneBrisée[ <Liste Points> ] permet de Construire une courbe affine par morceau passant par une suite de point.

**Exercice 4.** *Constuire sous Géogébra la géodésique partant de $P$ avec la vitesse $\overrightarrow{PQ}$.*

*Jouer avec les paramètres.*

## 2 Orientation et ruban de moebius

Sur le tore que nous avons vu dans la section précédente, il est possible de choisir une base du plan tangent de manière continue lorsque l'on parcours le tore.

**Exercice 5.** *Reprendre les exercices 1 et 2 et placer base du plan tangent. Faire varier le point sur le tore pour illustrer le choix continue d'une base du plan tangent.*

On dit que le tore est parallélisable. De manière générale, une surface n'est pas nécessairement parallélisable.

**Exercice 6.** *Construire une sphère, un point sur la sphère, le plan tangent en ce point et une base du plan tangent. Faire varier le point, comment se comporte la base du plan tangent ?*

Malgré les changements que subit la base du plan tangent sur la sphère, l'orientation ne change pas c'est à dire que le produit vectoriel des deux vecteurs de la base pointe toujours vers l'**extérieur** de la sphère. On dit que la sphère est orientable.

Le ruban de moebius est un exemple de surface "non-orientable".

**Exercice 7.** *Tracer sous Géogébra la surface paramétrée par*

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]-1,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \theta \\ h \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta - bh\sin(\theta/2) \\ bh\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

*Placer un point $P$ sur cette surface paramétré par deux curseurs. Construire le plan tangent en $P$ et une base de ce plan tangent.*

**Exercice 8.** *Que remarquez vous lorsque le point $P$ fait un tour du ruban ?*

# 3 Projet

L'évaluation de la partie Géogébra du cours "Logiciels pour l'enseignement" se fera sous la forme d'un projet. La section 1 du cours Géogébra 2 et la section 2 du cours Géogébra 1 doivent vous servir de modèle à ce qui est attendu. Un travail accompli doit comprendre

1. Un ou plusieurs concepts à illustrer. Au mieux Un théorème, une propriété ou une méthode
2. Une orientation claire : un public (pour mon cours L3 orientation enseignement), des acquis préalables (Je suppose que vous savez ce qu'est une surface paramétrée), une message, etc.
3. Un support pédagogique : une page d'exercices et de texte sensés guider un hypothétique élève.
4. Une correction composée de texte et de fichiers Géogébra.

Le travail est à faire en **binômes**. Vous devez choisir un thème dans la liste des sujets d'oraux du CAPES que vous pouvez trouver à l'adresse

http://capes-math.org/index.php?id=epreuves-orales

et me l'envoyer avec une petite description de ce que vous souhaitez illustrer. La description doit préciser le niveau les deux premiers points donnés plus haut. Je souhaite que vous m'envoyiez par courriel avant **lundi 21 mars** vos binômes, thèmes et première description. Je ne veux pas deux binômes proposant la même chose, premier arrivé premier servi. Pour **lundi 18 avril**, je vous demande de préparer les deuxième et troisième points donnés plus haut.

Le barême approximatif sera le suivant :

— 3 points pour la description de votre projet (points 1 et 2) ;
— 8 points pour le support pédagogique (point 3) ;
— 9 points pour la correction.

Couleurs et interactivités sont les bienvenus dans votre correction.