

TD Probabilités et statistiques

Corrections

TD 1

TD 2

TD 3

Exercice 4

1. On pose l'événement A : "avoir la bonne boîte après le premier choix". Il tire au hasard une boîte parmi trois. La situation est équiprobable donc la probabilité de tirer la bonne boîte est $\mathbb{P}(A) = 1/3$.
2. Posons l'événement B : "avoir la bonne boîte après le deuxième choix". Examinons les deux stratégies. Si l'on décide de garder la première boîte choisie quoi qu'il arrive, on a $\mathbb{P}_A(B) = 1$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 0$ donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$$

Si l'on décide de changer de boîte, on a

$\mathbb{P}_A(B) = 0$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 1$ donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

Par conséquent, le joueur a intérêt à changer de boîte.

Exercice 8

L'univers Ω est l'ensemble des arrangements de 6 parmi 6 donc $\text{Card } \Omega = 6!$. Il est supposé muni de la mesure d'équiprobabilité. donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{Card } \{\text{cas favorables}\}}{\text{Card } \Omega}$$

Pour construire un cas favorable on peut choisir l'homme le plus haut classé (un choix parmi 3), puis choisir les femmes qui sont classées avant lui ($k - 1$ choix parmi 3 sans remise et avec ordre) enfin choisir un classement des restant après l'homme en question ($6 - k$ choix parmi $6 - k$ sans remise et avec ordre).

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{A_3^1 A_3^{k-1} A_{6-k}^{6-k}}{6!} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Si } k = 1 \\ \frac{3}{10} & \text{Si } k = 2 \\ \frac{3}{3} & \text{Si } k = 3 \\ \frac{20}{20} & \text{Si } k = 4 \\ 0 & \text{Si } k \geq 5 \end{cases}$$

TD 4

Exercice 6 Soit $\Omega = \{1, \dots, 6\}$, X est une variable aléatoire sur Ω telle que pour tout $k \in \Omega$, $\mathbb{P}(X = k) = ck$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Déterminer la loi de X revient à déterminer c . Or

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^6 ck = c \frac{7 \times 6}{2}$$

Donc

$$c = \frac{1}{21}$$

Exercice 7

1. On peut supposer que la loi suivie par X sera une loi uniforme sur $[0, 1]$.
- 2.

$$\mathbb{P}(0, 2 \leq X \leq 0, 5) = \int_{0,2}^{0,5} 1 dt = 0, 3$$

TD 5

Exercice 1

On pose T la variable aléatoire donnant le temps d'attente avant la première alerte du service secours après 22h en minute. T suit une loi exponentielle de paramètre λ , c'est à dire une loi à densité ($\Omega = \mathbb{R}_+$) de densité $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$. On donne $\lambda = 0.1$.

- $\mathbb{P}(T \geq 30) = \lambda \int_{30}^{+\infty} e^{-t\lambda} dt = e^{-3}$.
- $\mathbb{P}(T \geq 60) = \lambda \int_{60}^{+\infty} e^{-t\lambda} dt = e^{-6}$.
- $P(T \geq 60/T \geq 30) = \mathbb{P}(T \geq 30) = e^{-3}$ car la loi exponentielle est sans mémoire. On peut aussi utiliser la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(T \geq 60/T \geq 30) = \frac{\mathbb{P}(T \geq 30 \cap T \geq 60)}{\mathbb{P}(T \geq 30)} \quad (1)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(T \geq 60)}{\mathbb{P}(T \geq 30)} \quad (2)$$

$$= \frac{e^{-6}}{e^{-3}} \quad (3)$$

$$= e^{-3} \quad (4)$$

Exercice 2

- (a) — Est dans la table
 - $\mathbb{P}(X < -0, 2) = \mathbb{P}(X > 0, 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 0, 2)$ qui est dans la table
 - $\mathbb{P}(X \geq -1, 54) = \mathbb{P}(X \leq 1, 54)$ qui est dans la table
 - $\mathbb{P}(-0, 63 \leq X \leq 1, 2) = \mathbb{P}(X \leq 1, 2) - \mathbb{P}(X < -0, 63) = \mathbb{P}(X \leq 1, 2) - (1 - \mathbb{P}(X \leq 0, 63))$ qui est dans la table
- (b) Lire la table des fractiles cette fois
- (a) La variable aléatoire $\frac{Y-2}{3}$ suit une loi normale réduite centrée.
- (b) La méthode est de centrer et réduire la variable aléatoire de sorte à pouvoir utiliser les tables connues.

$$\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 3) = \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \leq \frac{Y-2}{3} \leq \frac{1}{3}\right) \quad (5)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} \leq \frac{1}{3}\right) - \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \geq \frac{Y-2}{3}\right) \quad (6)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} \leq \frac{1}{3}\right) - \left(1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} \leq \frac{2}{3}\right)\right) \quad (7)$$

On peut maintenant utiliser les tables.

- (c) De la même manière, avant de pouvoir utiliser les tables, il faut normaliser et centrer.

$$0,05 = \mathbb{P}(Y > u) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} > \frac{u-2}{3}\right)$$

donc

$$0,95 = \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} \leq \frac{u-2}{3}\right)$$

Utiliser la table des fractiles pour trouver $\frac{u-2}{3}$ et ensuite trouver u .

Exercice 3

Soit X : " le poids de poudre dans le flacon". $X \sim \mathcal{N}(101, 1; 1, 1)$ On pose $Y = \frac{X-101,1}{1,1}$, $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- $\mathbb{P}(X < 100) = \mathbb{P}\left(\frac{X-101,1}{1,1} < \frac{-1,1}{1,1}\right) = \mathbb{P}(Y < -1)$ Comme Y suit une loi normale centrée réduite, on peut chercher la valeur dans les tables.
- On souhaite $\mathbb{P}(Y < -\frac{101,1-m}{1,1}) < 4\%$

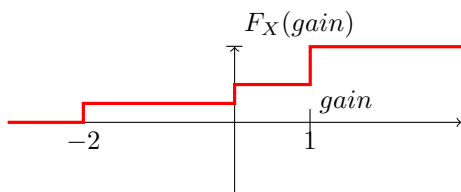
Exercice 4

- La minute d'arrivée X suit une loi uniforme $\mathcal{U}([0, 45])$.
- $\mathbb{E}(X) = \frac{45-0}{2} = 22,5$ donc Gauthier arrive en moyenne à 7 h 22 minutes et 30 secondes.

3. — $\mathbb{P}(X \leq 20) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$
 — $\mathbb{P}(X \geq 20) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$
 — $\mathbb{P}(20 \leq X \leq 30) = \frac{30}{45} - \frac{20}{45} = \frac{2}{9}$
4. $\mathbb{P}(X \geq 30 | X \geq 20) = \frac{\mathbb{P}(X \geq 30 \cap X \geq 20)}{\mathbb{P}(X \geq 20)} = \frac{20/45}{30/45} = \frac{2}{3}$

Exercice 5

1. $\Omega = \{pile, (face, pile), (face, face)\}$
 — $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(pile) = \frac{1}{2}$
 — $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((face, pile)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 — $\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}((face, face)) = \frac{1}{4}$
2. On note F_X la fonction de répartition de X .



3. $\mathbb{E}(X) = -2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$
4. Elle n'apporte pas grand chose...

TD 6

Exercice 1

1. — $\mathbb{P}(G_1 = 15) = \frac{1}{6}$
 — $\mathbb{P}(G_1 = 0) = \frac{1}{2}$
 — $\mathbb{P}(G_1 = 6) = \frac{1}{3}$
2. — $\mathbb{E}(G_1) = \frac{1}{6} \times 15 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{3} \times 6 = 4,5$
 — $\mathbb{V}(G_1) = \mathbb{E}(G_1^2) - \mathbb{E}(G_1)^2 = \frac{1}{6} \times 15^2 + \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{3} \times 6^2 - 4,5^2 = 29,25$

Exercice 2

1. (a) Chaque tirage est une épreuve de bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Les tirages sont avec remise donc **indépendants et identiques**.
 X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = \frac{1}{4}$.
- (b) (Formule de cours) $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{4}$, $\mathbb{V}(X) = 5 \frac{1}{4} (\frac{3}{4}) = \frac{15}{16}$
2. (a) $Y = 2X - 3(5 - X) = 5(X - 3)$
 (b) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(5(X - 3)) = 5(\mathbb{E}(X) - 3) = 5(\frac{5}{4} - 3) = -\frac{35}{4}$
 (c) Tout d'abord $\Omega = \{-15, -10, -5, 0, 5, 10\}$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 3 + \frac{k}{5}) = \binom{5}{3 + \frac{k}{5}} (\frac{1}{4})^{3 + \frac{k}{5}} (\frac{3}{4})^{3 + \frac{k}{5}}$

Exercice 3

On pose X le nombre de client dans la journée du magasin. D'après le cours : $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Or l'énoncé donne $\mathbb{E}(X) = 4$ donc $\lambda = 4$.

$$\mathbb{P}(X \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - e^{-4} - \dots - e^{-4} \frac{1024}{120} \quad (8)$$

Exercice 4 X suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. On souhaite $\mathbb{P}(X \leq 1) \leq 0,01$ donc $1 - e^{-\lambda} \leq 0,01$ et donc $\lambda \geq \ln(100)$. Ainsi $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\ln(100)}$.

Exercice 5

1. Pour que f soit une densité, il faut qu'elle soit continue par morceau, positive et d'intégrale 1.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 Kx(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx \quad (9)$$

$$= 0 + \frac{K}{2} - \frac{K}{3} + 0 \quad (10)$$

$$= \frac{K}{6} \quad (11)$$

$$= 1 \quad (12)$$

Donc $K = 6$

2. Espérance et variance existent car $xf(x)$ et $x^2f(x)$ sont clairement intégrable d'intégrale finie.

— $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x6x(1-x)dx = \frac{6}{3} - \frac{6}{4} = \frac{1}{2}$.

Mais ça on le savait déjà parce que la densité est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$ et $xf(x)$ est clairement d'intégrale finie.

— $\mathbb{V}(X) = E(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_0^1 x^2 \times 6x(1-x)dx - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

TD 7

Exercice 1

— La somme des probabilités vaut 1 donc

$$\frac{10}{40} + a + \frac{5}{40} + \frac{8}{40} + \frac{5}{40} + \frac{4}{40} = 1$$

et donc

$$a = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

— — $\mathbb{P}(X = x/Y = y)$

| | | | |
|------------------|----------------|------|-----|
| $x \backslash y$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| 0 | 10/18 | 8/13 | 5/9 |
| 1 | 8/18 | 5/13 | 4/9 |

— $\mathbb{P}(Y = y/X = x)$

| | | | |
|------------------|----------------|------|------|
| $x \backslash y$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| 0 | 10/23 | 8/23 | 5/23 |
| 1 | 8/17 | 5/17 | 4/17 |

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \tag{13}$$

$$= 0 \times \frac{23}{40} + \frac{-1}{2} \times \frac{8}{40} + 0 \times \frac{5}{40} + 1 \times \frac{4}{40} - \frac{17}{40} \left(-\frac{1}{2} \frac{18}{40} + \frac{9}{40} \right) \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} - 0 \tag{15}$$

$$= 0 \tag{16}$$

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5