TD Probabilités et statistiques

Corrections

TD 3

Exercice 4

1. On pose l'événement A :"avoir la bonne boite après le premier choix". Il tire au hasard une boite parmis trois. La situation est équiprobable donc la probablité de tirer la bonne boite est $\mathbb{P}(A) = 1/3$.
2. Posons l'événement B :"avoir la bonne boite après le deuxième choix". Examinons les deux stratégies. Si l'on décide de garder la première boite choisie quoi qu'il arrive, on a $\mathbb{P}_A(B) = 1$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 0$ donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$$

Si l'on décide de changer de boite, on a
$\mathbb{P}_A(B) = 0$ et $\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = 1$ donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

Par conséquent, le joueur a intérêt à changer de boite.

Exercice 8

L'univers Ω est l'ensemble des arrangements de 6 parmis 6 donc $\text{Card }\Omega = 6!$. Il est supposé muni de la mesure d'équiprobabilité. donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{Card }\{\text{cas favorables}\}}{\text{Card }\Omega}$$

Pour constuire un cas favorable on peut choisir l'homme le plus haut classé (un choix parmis 3), puis choisir les femmes qui sont classées avant lui ($k - 1$ choix parmis 3 sans remise et avec ordre) enfin choisir un classement des restant après l'homme en question ($6 - k$ choix parmis $6 - k$ sans remise et avec ordre).

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{A_3^1 A_3^{k-1} A_{6-k}^{6-k}}{6!} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Si } k = 1 \\ \frac{3}{10} & \text{Si } k = 2 \\ \frac{3}{20} & \text{Si } k = 3 \\ \frac{1}{20} & \text{Si } k = 4 \\ 0 & \text{Si } k \geqslant 5 \end{cases}$$

TD 4

Exercice 6 Soit $\Omega = \{1, \cdots, 6\}$, X est une variable aléatoire sur Ω telle que pour tout $k \in \Omega$, $\mathbb{P}(X = k) = ck$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Déterminer la loi de X revient à déterminer c. Or

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} ck = c\frac{7 \times 6}{2}$$

Donc

$$c = \frac{1}{21}$$

Exercice 7

1. On peut supposer que la loi suivi par X sera une loi uniforme sur $[0, 1]$.
2. $$\mathbb{P}(0,2 \leqslant X \leqslant 0,5) = \int_{0,2}^{0,5} 1\mathrm{d}t = 0,3$$

TD 5

Exercice 1

On pose T la variable aléatoire donnant le temps d'attente avant la première alerte du service secours après 22h en minute. T suit une loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire une loi à densité ($\Omega = \mathbb{R}_+$) de densité $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$. On donne $\lambda = 0.1$.

1. $\mathbb{P}(T \geqslant 30) = \lambda \int_{30}^{+\infty} e^{-t\lambda}\mathrm{d}t = e^{-3}$.
2. $\mathbb{P}(T \geqslant 60) = \lambda \int_{60}^{+\infty} e^{-t\lambda}\mathrm{d}t = e^{-6}$.
3. $P(T \geqslant 60/T \geqslant 30) = \mathbb{P}(T \geqslant 30) = e^{-3}$ car la loi exponentielle est sans mémoire. On peut aussi utiliser la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(t \geqslant 60/T \geqslant 30) &= \frac{\mathbb{P}(T \geqslant 30 \cap T \geqslant 60)}{\mathbb{P}(T \geqslant 30)} && (1)\\
&= \frac{\mathbb{P}(T \geqslant 60)}{\mathbb{P}(T \geqslant 30)} && (2)\\
&= \frac{e^{-6}}{e^{-3}} && (3)\\
&= e^{-3} && (4)
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. (a) — Est dans la table
   — $\mathbb{P}(X < -0,2) = \mathbb{P}(X > 0,2) = 1 - \mathbb{P}(X < 0,2)$ qui est dans la table
   — $\mathbb{P}(X \geqslant -1,54) = \mathbb{P}(X \leqslant 1,54)$ qui est dans la table
   — $\mathbb{P}(-0,63 \leqslant X \leqslant 1,2) = \mathbb{P}(X \leqslant 1,2) - \mathbb{P}(X < -0,63) = \mathbb{P}(X \leqslant 1,2) - (1 - \mathbb{P}(X \leqslant 0,63))$ qui est dans la table

   (b) Lire la table des fractile cette fois
2. (a) La variable aléatoire $\frac{Y-2}{3}$ suit une loi normale réduite centrée.

   (b) La méthode est de centrer et réduire la variable aléatoire de sorte à pouvoir utiliser les tables connues.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(0 \leqslant Y \leqslant 3) &= \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \leqslant \frac{Y-2}{3} \leqslant \frac{1}{3}\right) && (5)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} \leqslant \frac{1}{3}\right) - \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \geqslant \frac{Y-2}{3}\right) && (6)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} \leqslant \frac{1}{3}\right) - \left(1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} \leqslant \frac{2}{3}\right)\right) && (7)
\end{aligned}$$

   On peut maintenant utiliser les tables.

   (c) De la même manière, avant de pouvoir utiliser les tables, il faut normaliser et centrer.

$$0,05 = \mathbb{P}(Y > u) = \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} > \frac{u-2}{3}\right)$$

   donc

$$0,95 = \mathbb{P}\left(\frac{Y-2}{3} \leqslant \frac{u-2}{3}\right)$$

   Utiliser la table des fractiles pour trouver $\frac{u-2}{3}$ et ensuite trouver u.

Exercice 3

Soit X :" le poid de poudre dans le flacon". $X \sim \mathcal{N}(101,1;1,1)$ On pose $Y = \frac{X-101,1}{1,1}$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. $\mathbb{P}(X < 100) = \mathbb{P}\left(\frac{X-101,1}{1,1} < \frac{-1,1}{1,1j}\right) = \mathbb{P}(Y < -1)$ Comme Y suit une loi normale centrée réduite, on peut chercher la valeur dans les tables.
2. On souhaite $\mathbb{P}(Y < -\frac{101,1-m}{1,1}) < 4\%$

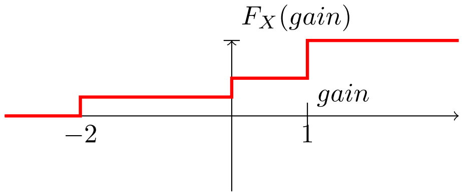
Exercice 4

1. La minute d'arrivée X suit une loi uniforme $\mathcal{U}([0,45])$.
2. $\mathbb{E}(X) = \frac{45-0}{2} = 22,5$ donc Gauthier arrive en moyenne à 7 h 22 minutes et 30 secondes.

3. — $\mathbb{P}(X \leqslant 20) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$
   — $\mathbb{P}(X \geqslant 20) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$
   — $\mathbb{P}(20 \leqslant X \leqslant 30) = \frac{30}{45} - \frac{20}{45} = \frac{2}{9}$
4. $\mathbb{P}(X \geqslant 30/X \geqslant 20) = \frac{\mathbb{P}(X\geqslant 30 \cap X \geqslant 20)}{\mathbb{P}(X\geqslant 20)} = \frac{20/45}{30/45} = \frac{2}{3}$

<u>Exercice 5</u>

1. $\Omega = \{pile, (face, pile), (face, face)\}$
   — $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(pile) = \frac{1}{2}$
   — $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((face, pile)) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
   — $\mathbb{P}(X = -2) = \mathbb{P}((face, face)) = \frac{1}{4}$
2. On note F_X la fonction de répartition de X.



3. $\mathbb{E}(X) = -2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$
4. Elle n'apporte pas grand chose...

TD 6

<u>Exercice 1</u>

1. — $\mathbb{P}(G_1 = 15) = \frac{1}{6}$
   — $\mathbb{P}(G_1 = 0) = \frac{1}{2}$
   — $\mathbb{P}(G_1 = 6) = \frac{1}{3}$
2. — $\mathbb{E}(G_1) = \frac{1}{6} \times 15 + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{3} \times 6 = 4,5$
   — $\mathbb{V}(G_1) = \mathbb{E}(G_1^2) - \mathbb{E}(G_1)^2 = \frac{1}{6} \times 15^2 + \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{3} \times 6^2 - 4,5^2 = 29.25$

<u>Exercice 2</u>

1. (a) Chaque tirage est une epreuve de bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Les tirages sont avec remise donc **indépendants et identiques**.
   X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = \frac{1}{4}$.
   (b) (Formule de cours) $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{4}$, $\quad \mathbb{V}(X) = 5\frac{1}{4}(\frac{3}{4}) = \frac{15}{16}$
2. (a) $Y = 2X - 3(5 - X) = 5(X - 3)$
   (b) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(5(X - 3)) = 5(\mathbb{E}(X) - 3) = 5\left(\frac{5}{4} - 3\right) = -\frac{35}{4}$
   (c) Tout d'abord $\Omega = \{-15, -10, -5, 0, 5, 10\}$ $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 3 + \frac{k}{5}) = \binom{5}{3+\frac{k}{5}} \left(\frac{1}{4}\right)^{3+\frac{k}{5}} \left(\frac{3}{4}\right)^{3+\frac{k}{5}}$

<u>Exercice 3</u>

On pose X le nombre de client dans la journée du magasin. D'après le cours : $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ et $\mathbb{E}(X) = \lambda$. Or l'énoncé donne $\mathbb{E}(X) = 4$ donc $\lambda = 4$.

$$\mathbb{P}(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) = 1 - e^{-4} - \cdots - e^{-4}\frac{1024}{120} \tag{8}$$

<u>Exercice 4</u> X suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et $\mathbb{E}(X) = \lambda$. On souhaite $\mathbb{P}(X \leqslant 1) \leqslant 0,01$ donc $1 - e^{-\lambda} \leqslant 0,01$ et donc $\lambda \geqslant \ln(100)$. Ainsi $\mathbb{E}(X) = \lambda \geqslant \ln(100)$.

<u>Exercice 5</u>

1. Pour que f soit une densité, il faut qu'elle soit continue par morceau, positive et d'intégrale 1.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_0^1 Kx(1-x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} 0\mathrm{d}x && (9)\\
&= 0 + \frac{K}{2} - \frac{K}{3} + 0 && (10)\\
&= \frac{K}{6} && (11)\\
&= 1 && (12)
\end{aligned}$$

Donc $K = 6$

2. Espérence et variance existent car $xf(x)$ et $x^2 f(x)$ sont clairement intégrable d'intégrale finie.
   - $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x6x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{6}{3} - \frac{6}{4} = \frac{1}{2}$.
     Mais ça on le savait déjà parce que la densité est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$ et $xf(x)$ est clairement d'intégrale finie.
   - $\mathbb{V}(X) = E(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_0^1 x^2 \times 6x(1-x)\mathrm{d}x - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} - \frac{6}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

TD 7

Exercice 1

- La somme des probabilités vaut 1 donc

$$\frac{10}{40} + a + \frac{5}{40} + \frac{8}{40} + \frac{5}{40} + \frac{4}{40} = 1$$

et donc

$$a = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

- — $\mathbb{P}(X = x)$

x	0	1

- — $\mathbb{P}(Y = y)$

y	0	1

-

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) && (13)\\
&= 0 \times \frac{23}{40} + \frac{-1}{2} \times \frac{8}{40} + 0 \times \frac{5}{40} + 1 \times \frac{4}{40} - \frac{17}{40}\left(-\frac{1}{2}\frac{18}{40} + \frac{9}{40}\right) && (14)\\
&= -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} - 0 && (15)\\
&= 0 && (16)
\end{aligned}$$

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5

1 TD 8

Exercice 1

Exercice 2

1. $\mathbb{P}(X = -a) = \frac{19}{37}$ et $\mathbb{P}(X = a) = \frac{18}{37}$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{19}{37}(-a) + \frac{18}{37}a = -\frac{a}{37}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} &= \frac{19}{37}\left(-a + \frac{a}{37}\right)^2 + \frac{18}{37}\left(a + \frac{a}{37}\right)^2 && (17)\\
&= \frac{19 \times 36^2 + 18 \times 38^2}{37^3} && (18)\\
&= \frac{1368}{37^2} && (19)
\end{aligned}$$

2. $\mathbb{P}(Y = -a) = \frac{36}{37}$ et $\mathbb{P}(Y = 35a) = \frac{1}{37}$ donc $\mathbb{E}(Y) = -a\frac{36}{37} + \frac{35a}{37} = -\frac{a}{37}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \frac{36 \times 36^2 + 1 \times (36 \times 37 + 1)}{37^3} && (20)\\
&= \frac{1297}{37^2} && (21)
\end{aligned}$$

3. Personnellement : tout sur le 21 !

Exercice 3

Exercice 4