Geogebra 1

Logiciels de maths pour l'enseignement
7 février 2017
leo.brunswic.fr

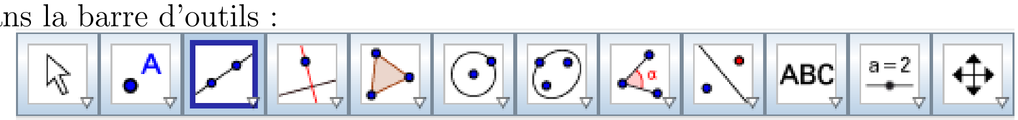
Léo Brunswic
leo.brunswic@univ-avignon.fr

Geogebra est un logiciel permettant de faire des constructions dans le plan ou l'espace, possiblement paramétrées, . Geogebra possède également quelques outils de calcul formel dont nous ne ferons pas usage. Je vous invite à regarder https://www.geogebra.org pour la documentation et télécharger Geogebra sur vos ordinateurs personnels. Pour les utilisateurs d'Ubuntu, la page suivante sera utile : https://doc.ubuntu-fr.org/geogebra.

L'objectif de cette séance est de se familiariser avec Geogebra pour effectuer des constructions élémentaires de géométrie dans le plan et d'explorer superficiellement quelques fonctionnalités d'automatisation de Geogebra.

1 Rappels de géométrie plane

L'interface de travail est décomposée en sous-fenêtres : graphique, graphique2, graphique3D, algèbre, etc. Seuls "graphique", "algèbre" et "champ de saisie" nous seront utiles, on peut les ouvrir en allant dans Affichage. Geogebra propose un certain nombre d'outils de géométrie plane comme placer des points, tracer une droite, tracer un cercle... Ces outils se trouvent dans la barre d'outils :



On profite de l'exploration des possibilités de Geogebra pour se souvenir de nos cours de collège. Dans la fenêtre "graphique", clique droit sur fond et décocher "axes".

Exercice 1. *Construire un triangle ABC quelconque sous geogebra et tracer à la règle et au compas uniquement*

1. *le cercle circonscrit de ABC ;*
2. *le cercle inscrit de ABC ;*
3. *l'orthocentre de ABC ;*
4. *le centre de gravité de ABC.*

Déplacer les points A, B et C observer la construction.

Exercice 2. *Placer trois points A, B et C dans le plan et construire à la règle et au compas la parallèle à la droite (AB) passant par C.*

Exercice 3. *Construire un triangle rectangle, afficher la longueur des côtés*

Exercice 4. *Construire une illustration du théorème de Thalès*

2 Constructions règle et compas, théorème de Wantzel

Les problèmes de constructions à la règle et au compas ont plus de 2000 ans. Chez les Grecs, ces constructions sont centrales car ceux-ci fondent leurs mathématiques sur la géométrie : le concept de nombre lui même est géométrique.

Définition 1. *Un nombre est le rapport des longueurs de deux segments, le rapport d'aire de deux surfaces ou le rapport de volume de deux solides.*

En partant d'une longueur de référence, l'unité, ils savent utiliser les théorèmes de Thalès et de Pythagore pour construire des rapports ou produits de longueurs et extraire des racines carrées. Construire une racine cubique ou π pose problème et la preuve de l'impossibilité de ces constructions devra attendre le XIXe siècle. De manière informelle, un point est constructible s'il est obtenu par une succession de constructions de droites et de cercles en partant de points données au préalable.

Définition 2 (Points constructible)**.** *On se place dans le plan, on se donne un point O et un point I. La distance OI est supposé égale à 1.*

L'ensemble des points constructibles est définit par récurrence.

1. *O et I sont constructibles.*
2. *Si A, B, C et D sont constructibles et si les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, alors le point d'intersection de (AB) et (CD) est constructible.*
3. *Si A, B, C, D et E sont constructibles alors les points d'intersections, s'ils existent, du cercle de centre A de rayon BC et de la droite (DE) sont constructibles.*
4. *Si A, B, C, D, E et F sont constructibles alors les points d'intersections, s'ils existent, du cercle de centre A de rayon BC et du cercle de centre D de rayon EF sont constructibles.*

Définition 3 (Nombre constructibles)**.** *Un nombre est constructible s'il est la distance entre deux points constructibles.*

Pierre-Laurent Wantzel a démontré au début du XIXe siècle le théorème suivant.

Théorème 1 (Wantzel)**.** *Un nombre est constructible si et seulement s'il s'écrit avec les symboles $+, -, \div, \times$ et $\sqrt{}$.*

Exercice 5. *Placer deux points O et I dans le plan et tracer la droite (OI). On suppose que $OI = 1$. Placer deux points A et B sur la demi-droite $[OI)$.*

1. *Construire un point C sur $[OI)$ tel que $OC = 5$*
2. *Construire un point D sur $[OI)$ tel que $OD = OA + OB$*
3. *Construire un point E sur $[OI)$ tel que $OE = OA \times OB$*
4. *Construire un point F sur $[OI)$ tel que $OF = OA/OB$*
5. *Construire un point G sur $[OI)$ tel que $OG = \sqrt{OA}$*

On peut définir des fonctions additionne, multiplie et divise, racine carrée en utilisant "Créer un outil".

Exercice 6. *Constuire le nombre*

$$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{2}}}{3}$$

Il est très tentant de se lancer dans un constuction règle et compas des polygones constructibles. Cela devient assez rapidement complexe et pour cause.

Théorème 2 (Gauss-Wantzel)**.** *Un polygone à n côté est constructible si et seulement si $n = 2^q p_1 \cdots p_s$ où les p_i sont des nombres premiers distinct et de la forme $2^{2^k}+1$.*

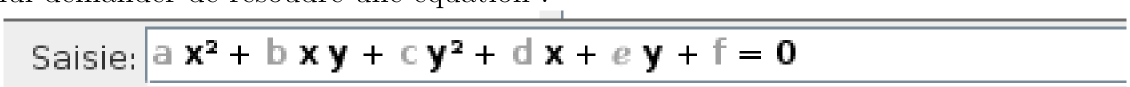
Par exemple : $5 = 2^{2^1}+1$ donc le pentagone est constructible. Par contre, 7 n'est pas de la forme $2^{2^k}+1$, l'eptagone n'est donc par constructible.

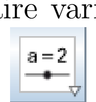
Très rapidement les constructions deviennent très complexes, même avec un outils tel que Geogebra. Il est cependant envisageable d'écrire un algorithme qui fait de tels constructions.

3 Coniques et résolution d'équation de degrés supérieurs

Dans la section précédente, on n'autorisait que la construction de cercles et de droites. Avec ces limitations, il ne nous était possible que de résoudre des équations de degré 1 (avec Thalès) ou 2 (avec Pythagore). En s'autorisant a manipuler des coniques, d'autres équations deviennent accessibles.

Geogebra permet de tracer des coniques de plusieurs manières différentes. Il est possible de lui demander de résoudre une équation :



Dans cet exemple, si les paramètres a, b, c, d, e, f, g ne sont pas définit, il va automatiquement proposer de créer des curseurs correspondants. Un curseur est un paramètre réel que l'on peut faire varier via un curseur affiché à l'écran. Il est possible de créer un curseur via le bouton  de la barre d'outils.

Exercice 7. *Reproduire l'exemple et jouer un peu avec les paramètres.*

On suppose à présent que l'on sait tracer une conique du moment que ses paramètres sont constructibles. Cela permet d'étendre les points constructibles en ajoutant des points qui sont intersection de coniques.

Exercice 8. *Tracer l'hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ et la parabole d'équation $y = x^2$. Construire le point d'intersection de ces deux coniques.*

Quels nombres construisez vous de cette manière ?

La formule de Cardan permet de construire une racine d'un polynome de degré 3 arbitraire en utilisant les racines carré et cubique. Une formule similaire existe pour les polynômes de degré 4 n'utilisant que les racines carré, cubique et quartique. L'intersection de deux coniques permet ainsi de résoudre toutes les équations de degré 3 et de degré 4. Vous pouvez vérifier que les points d'intersection de deux coniques ont des coordonnées qui résolvent des équations de degré au plus 4 en les paramètres des coniques.

Il est possible de demander à geogebra de tracer des courbes définit de manière implicite de degré plus grand. Par exemple les courbes elliptiques :

$$y^3 = ax^2 + bx + c.$$

Ou encore des fonctions plus complexes du moment qu'elles sont résolues en l'une des variables.

$$y = sin(1/x)$$

4 Courbes paramétrées et solveur différentiel

La commande "courbe" ci-dessous permet de tracer des courbes paramétrées.

Saisie: Courbe[<Expression>, <Expression>, <Variable>, <de>, <à>]

Exercice 9. *Tracer les courbes paramétrées suivantes*

1.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & sin(2t) \\ y & = & sin(3t) \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & R\left(\ln(|t/2|) + \cos(t)\right) \\ y & = & R\sin(t) \end{array}\right.$$

3.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & (t-1)\ln|t| \\ y & = & (t+1)\ln|t| \end{array}\right.$$

Geogebra intègre également un solveur différentiel limité aux équations du premier ordre dans $\mathbb{R}^2$.

Saisie: RésolEquaDiff[<y'>, <x'>, <x initial>, <y initial>, <t final>, <Pas>]

On s'intéresse à différentielle

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x(1-y) \\ y' & = & y(x-1) \end{array}\right.$$

Exercice 10. *Résoudre numériquement l'équation différentielle avec des paramètres. Trouver une intégrale première et tentez d'en tracer des lignes de niveau de manière implicite.*

5 Problèmes supplémentaires

Exercice 11. *On colorie les points du plan avec trois couleurs. On cherche à colorier les points de sorte que deux points distants de 1 sont de couleurs différentes. Montrer que cela n'est pas possible et construire une illustration Geogebra de votre preuve.*

Exercice 12. *Constuire les polygônes constructibles ayant moins de 20 côtés*

Exercice 13. *Proposer une petite application interactive illustrant l'influence des coefficients d'un polynômes sur deuxième ou troisième degré.*

Théorème 3 (Varillon)**.** *Soient $ABCD$ un quadrilatère dans le plan. Le quadrilatère formé formé des milieux des cotés de $ABCD$ est un parallélogramme.*

Exercice 14. *Proposer une petite application interactive illustrant le théorème de Varillon*

Exercice 15. *Proposer une petite application résolvant graphiquement un système deux équations deux inconnues.*