

TD N° 9

Exercice 1. Une machine fabrique des pièces en grande série. À chaque pièce tirée au hasard, on associe sa longueur exprimée en millimètres Y . On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m = 28.2$ et $\sigma = 0.027$.

1. Montrer que la variable M qui, à tout échantillon aléatoire de taille n , associe la moyenne des longueurs des n pièces de l'échantillon, suit la loi normale $\mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.
2. Déterminer n pour que la probabilité que la moyenne des longueurs des n pièces soit comprise entre 28.195 et 28.205 soit égale à 0.95.

Exercice 2. Le nombre de pannes mensuelles sur une machine suit une loi de Poisson de paramètre 2.5. L'entreprise dispose de 10 machines qui fonctionnent en parfaite indépendance.

1. En un mois, quelle est la probabilité exacte de constater entre 25 et 30 pannes ?
2. Comparer à la valeur approchée obtenue par le Théorème Central Limite.

Exercice 3. On joue 10000 fois à « Pile » ou « Face » avec une pièce équilibrée. Les lancers sont indépendants. On note Y le nombre de « Face ».

1. Quelle est la loi suivie par Y ?
2. Calculer l'espérance et la variance de Y .
3. Calculer la probabilité $P(|Y - 5000| \geq 100)$ en utilisant :
 - le théorème de Chebychev.
 - le théorème central limite.

Exercice 4. Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. À un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t . Quelle est la loi de Y ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
2. On pose $Z = (Y - 1000)/\sqrt{800}$. Justifier qu'on peut approcher la loi de Z par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2.5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.