
TD N° 8

Exercice 1. Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Ces boules sont indiscernables au toucher et nous effectuons n tirages sans remise. La variable X donne le rang de sortie de la première boule blanche et la variable Y celui de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. En déduire la loi de Y .

Exercice 2. Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36, dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0, verte. Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire, gagne deux fois sa mise si la couleur mise sort. Si ce joueur mise sur un numéro de 1 à 36, il gagne 36 fois sa mise. Toute mise sur le numéro 0 est interdite.

1. Le joueur mise au hasard a euros sur une couleur. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle X égale au gain du joueur. Calculer l'espérance et la variance de X .
2. Le joueur mise au hasard a euros sur l'un des numéros de 1 à 36. Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle Y égale au gain du joueur. Calculer l'espérance et la variance de Y .
3. Si vous aviez a euros à miser, miseriez-vous sur un numéro de 1 à 36 ou sur une couleur (rouge ou noire) ?

Exercice 3. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. Ces boules sont indiscernables au toucher et nous tirons successivement 2 boules de l'urne. Nous définissons alors les variables aléatoires

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule est blanche} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{si la seconde boule est blanche} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Nous supposons que les tirages sont effectués avec remise.
 - (a) Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ?
 - (b) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
 - (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
 - (d) Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$.
2. Nous supposons à présent que les tirages sont effectués sans remise.
 - (a) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
 - (b) Quelle est la loi de X ? Quelle est la loi de Y ?
 - (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
 - (d) Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4. Un portefeuille est constitué de deux actifs dont les cours sont représentés par les variables aléatoires X et Y , avec $\text{Var}(X) = a$ et $\text{Var}(Y) = b$. Nous supposons ces variables indépendantes. Le risque du portefeuille est alors la variance de

$$Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y,$$

où λ représente la proportion du portefeuille investie dans l'actif X . Trouver la valeur de λ minimisant le risque pris.