TD n° 7

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la distribution de probabilité jointe est donnée par le tableau suivant :

X \ Y	$-\frac{1}{2}$	0	1
0	$\frac{10}{40}$	a	$\frac{5}{40}$
1	$\frac{8}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{4}{40}$

1. Trouver a.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 2. On considère 4 boîtes numérotées de 1 à 4. La boîte numérotée k contient elle-même k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boite puis on tire (toujours au hasard) une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
4. Calculer l'espérance et la variance des variables X et Y.
5. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. On lance deux dés équilibrés. Nous notons alors X le maximum des deux faces obtenues et Y leur minimum.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) puis ses lois marginales.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Une armoire est constituée de trois tiroirs. Les tiroirs sont au départ vide et Hadrien y range une première paire de chaussettes vertes, puis une paire rouge et enfin une paire noire. Se moquant d'avoir ses chaussettes dans un même tiroir, Hadrien choisit pour chaque paire de chaussettes rangées un tiroir au hasard. On note X le nombre de paires de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides.

1. Déterminez la loi du couple (X, N).
2. Les variables X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 5.

1. Soient X et Y sont deux variables aléatoires de même loi (loi discrète ou à densité). Supposons que la variance de X (et donc de Y) est bien définie. Montrer que $\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y) = 0$.
2. Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires ayant pour moyennes m_i et pour variances σ_i^2, $i = 1, 2$. Soit $X = Z_1$ et $Y = Z_1 + Z_2$. Calculer le coefficient de corrélation ρ entre X et Y.